Chapitre II

FORCES MAGNETIQUES

1- Courant dans un conducteur soumis à un champ électromagnétique – Effet Hall

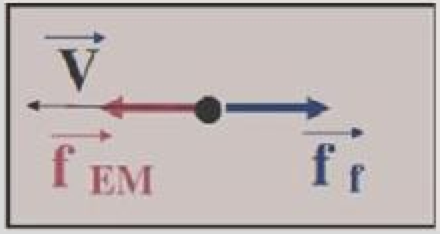
2- Forces magnétiques exercées sur un conducteur – Loi de Laplace

3- Travail des forces magnétiques– Théorème de Maxwell

1- Courant dans un conducteur soumis à un champ électromagnétique – Effet Hall

- Courant dans un conducteur = déplacement des porteurs mobiles (porteurs + et porteurs −)
- Métaux : porteurs = électrons (charge q = - e)

$$\vec{f}_{EM} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$



- Chocs multiples = frottement «visqueux »

$$\vec{f}_{f} = -k\vec{v}$$

- En régime permanent : $\vec{f}_{EM} + \vec{f}_{f} = \vec{0}$

$$\Longrightarrow \quad \vec{v} = \frac{q}{k}\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

- On définit la mobilité des porteurs par : $\mu = |q| / k$ (en $m^2V^{-1}s^{-1}$)

La loi d'ohm locale

$$\vec{\mathbf{j}} = nq\vec{\mathbf{v}} = n\frac{q^2}{k}\left(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{B}}\right) = \gamma\left(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{B}}\right)$$

densité de courant

nombre de charges par unité de volume

La conductivité γ du matériau (en $\Omega^{-1}.m^{-1}$)

$\vec{j}$ ***NON//*** à $\vec{E}$

$\longrightarrow$ **Régime transitoire**

$$\boxed{\gamma = n\frac{q^2}{k} = n|q|\mu}$$

$$j_x = \frac{\sigma\left(E_x + \omega\tau E_y\right)}{\left(1+\omega^2\tau^2\right)} \qquad j_y = \frac{\sigma\left(E_y - \omega\tau E_x\right)}{\left(1+\omega^2\tau^2\right)} \qquad j_z = \sigma E_z$$

Effet Hall : $\vec{j}$ peut être // à $\vec{E}_{appliqué}$

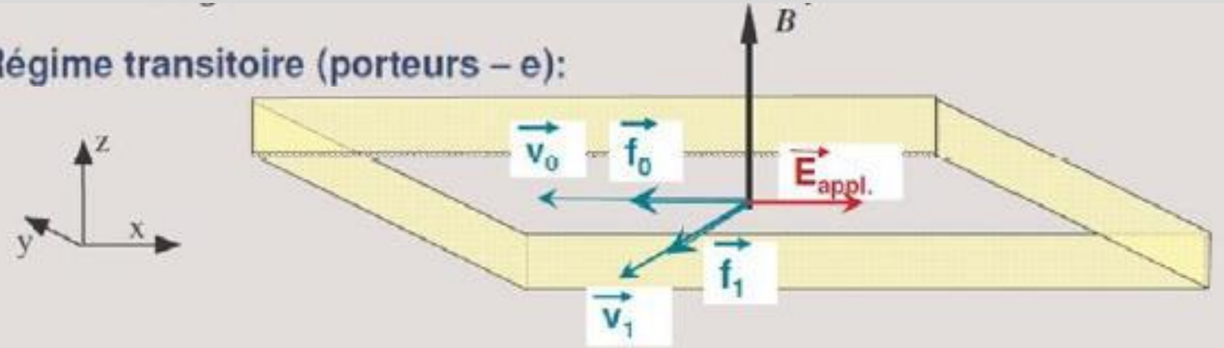
si $\exists$ le champ de Hall : $\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}$

et $\vec{E} = \vec{E}_H + \vec{E}_{appliqué}$

$\longrightarrow$ **Régime permanent**

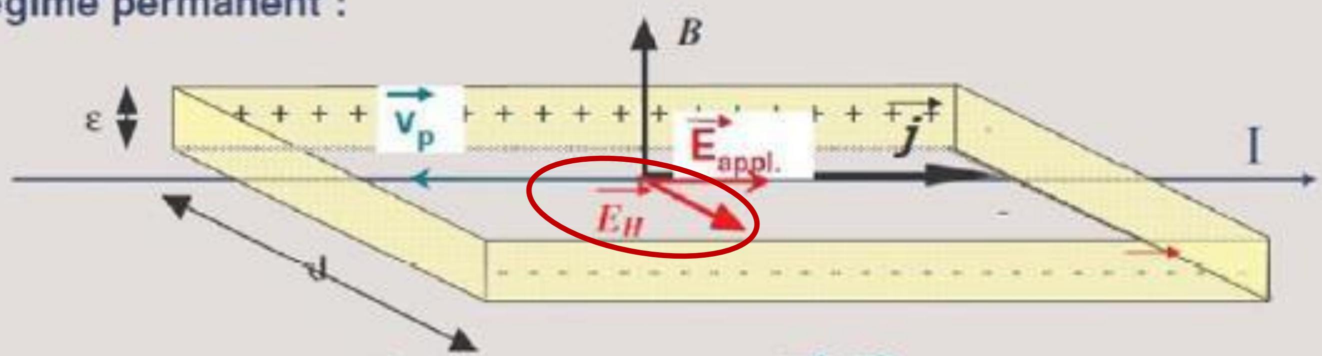
• Mise en évidence et application du champ de Hall dans un ruban à section rectangulaire

- Régime transitoire (porteurs – e):



V_1 « oblique » ⇒ accumulation de charges sur les faces latérales ⇒ apparition d'un champ électrostatique = champ de Hall

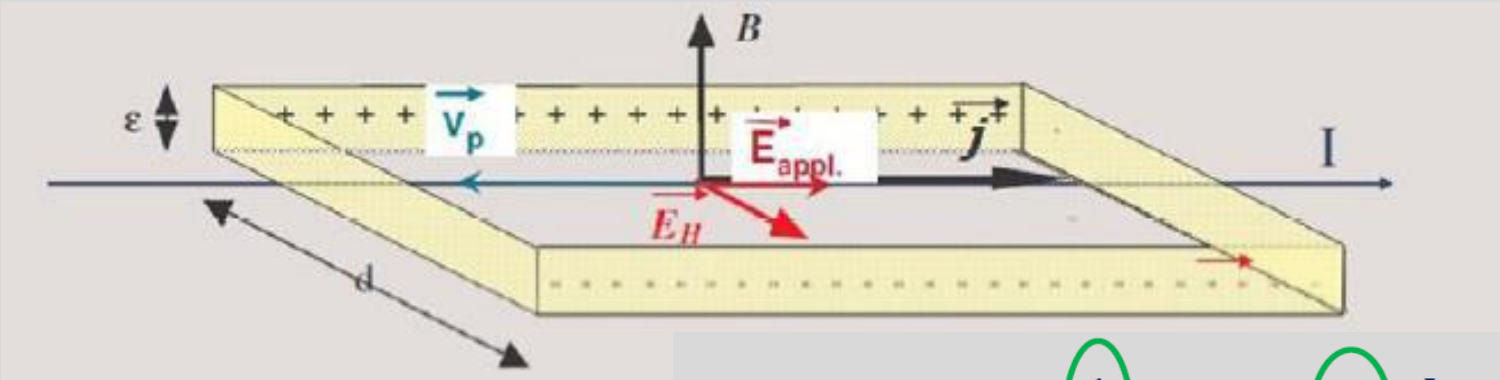
- Régime permanent :



$\vec{V}_p$ // à l'axe du ruban, $\vec{E}_H$ annulant l'effet de $(\vec{v}_p \wedge \vec{B})$

- Application :

- Régime permanent



Au champ électrostatique $E_H = -vB = -\frac{1}{nq}jB = -R_H\frac{I}{\varepsilon d}B$

constante de Hall

est associé la ddp $V_H = |E_H|d$ entre les faces latérales

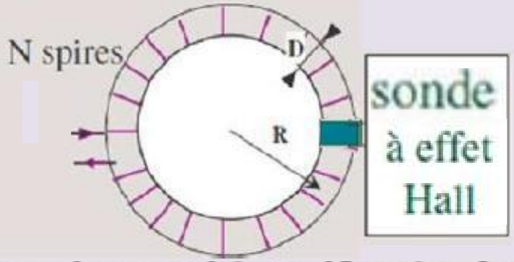
$V_H = |R_H|\frac{I}{\varepsilon}B$ ⟹ La mesure de V_H permet d'en déduire B

= principe utilisé dans les sondes et capteurs à effet Hall

Principe de quelques applications de l'effet Hall

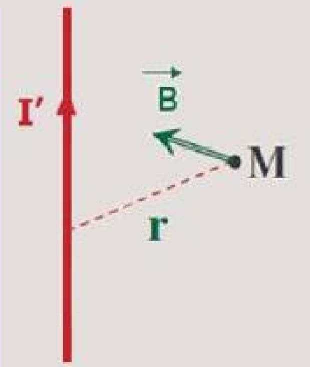
$$V = |R_H| \frac{IB}{\varepsilon}$$

1) Mesure du champ B :



I fixé, V $\rightarrow$ **mesure de B**

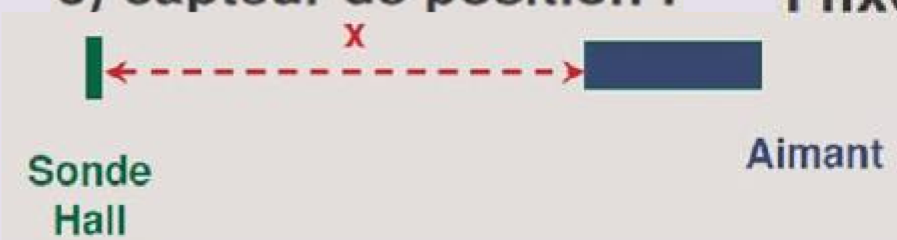
2) Ampèremètre (forte intensité)



I fixé, V $\rightarrow$ B = μ_0 I' / (2πr)

$\rightarrow$ **mesure de I'**

3) capteur de position :



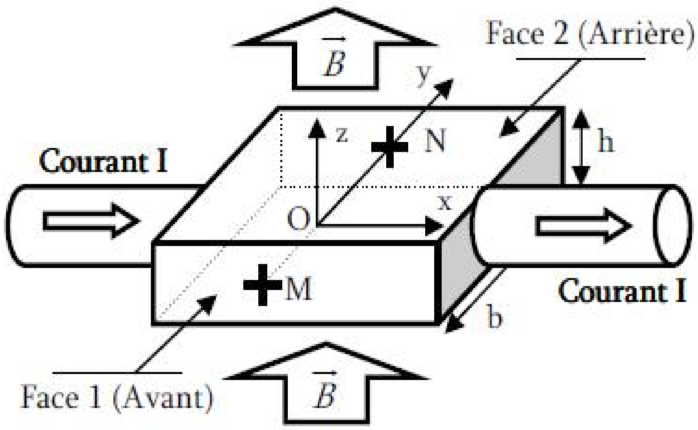
I fixé, V $\rightarrow$ B = fonction de la distante x à un aimant permanent

$\rightarrow$ **mesure de x**

Capteur à Effet Hall

On considère une plaque rectangulaire d'épaisseur h, et de largeur b, représentée sur la figure suivante. Elle est réalisée dans un semi-conducteur où la conduction électrique est assurée par des électrons mobiles dont le nombre par unité de volume est n. La plaque est parcourue par un courant d'intensité I, uniformément réparti sur la section de la plaque avec la densité volumique $\vec{J} = J \cdot \vec{e_x}$ $(J > 0)$.

Elle est alors placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B \cdot \vec{e_z}$ $(B > 0)$, crée par des sources extérieures. Le champ magnétique crée par le courant dans la plaque est négligeable devant le champ extérieur, et on suppose que le vecteur densité de courant est toujours porté par l'axe (Ox) (circulation permanente des e^-).



1. Champ électrique de Hall

1.a) Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}$ des électrons dans la plaque en fonction de $\vec{J}$, n et e en l'absence de champ magnétique extérieur.

1.b) Lors de l'apparition d'un champ magnétique extérieur $\vec{B}$, le courant est dévié et il va y avoir accumulation de charges. Représenter sur un schéma ce phénomène.

1.c) En régime permanent, après que les charges se soient accumulées, le vecteur densité de courant $\vec{J}$ est forcément parallèle à (Ox) (sinon des charges sortiraient par les cotés de la plaque…), en déduire que ces charges font apparaître un champ électrique dit de Hall : $\overrightarrow{E_H} = \frac{1}{ne}\vec{J} \wedge \vec{B}$.

1.d) Exprimer les composantes de ce champ de Hall $\overrightarrow{E_H}$.

2. Tension de Hall et mesure du champ magnétique

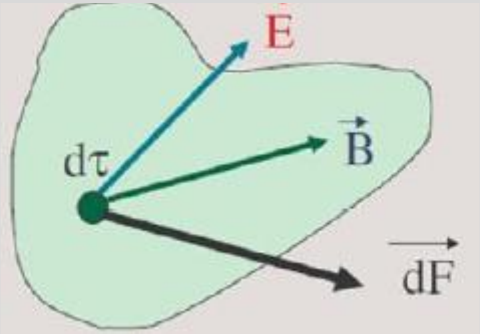
2.a) On considère 2 points M et N en vis-à-vis des faces 1 (x = -b/2) et 2 (x = +b/2). Calculer la différence de potentiel entre ces deux points $U_H = V_N - V_M$ appelée tension de Hall

2.b) Montrer que U_H s'écrit $U_H = \frac{C_H}{h} \cdot I \cdot B$, et exprimer la constante C_H. En quoi la mesure de cette tension de Hall peut-elle être utile ?

2.c) AN : Pour l'antimoniure d'indium InSb, $C_H = 375.10^{-6} u_{SI}$, $I = 0,1 A$, $h = 0,3 mm$ et $U_H = 88 mV$. Calculer la norme du champ B, ainsi que la densité volumique n en électrons par m^3.

2- Forces magnétiques exercées sur un conducteur – Loi de Laplace

- Forces s'exerçant sur un volume dτ



L'électroneutralité globale du milieu impose $\rho_f + \rho_m = 0$

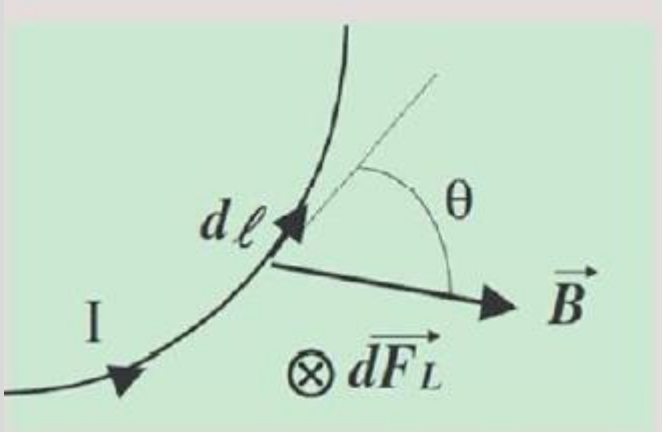
$$\overrightarrow{dF} = \underbrace{\rho_f \overrightarrow{E}\, d\tau}_{\text{Force électrostatique exercée sur les charges fixes}} + \underbrace{\rho_m \left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right) d\tau}_{\text{Force électromagnétique exercée sur les charges en mouvement}}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{dF} = \rho_m \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\, d\tau = \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}\, d\tau$$

force élémentaire de Laplace

Conducteur filiforme

On a : $\vec{j}d\tau \equiv Id\vec{\ell}$

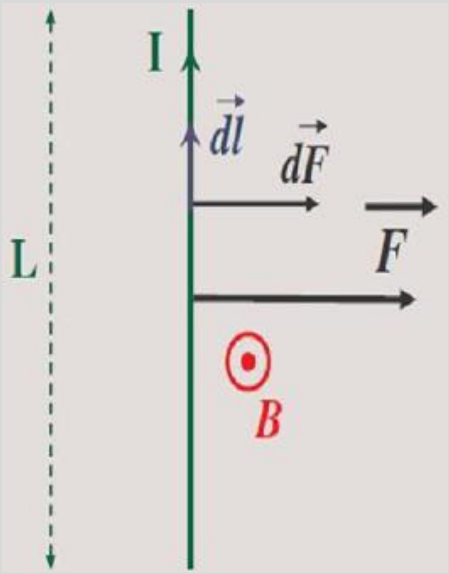


$$\Longrightarrow \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell} \wedge \vec{B} \begin{cases} \cdot \text{ perpendiculaire au plan } (d\vec{\ell}, \vec{B}) \\ \cdot \text{ trièdre } (d\vec{\ell}, \vec{B}, d\vec{F}) \text{ direct} \\ \cdot\ \theta = (d\vec{\ell}, \vec{B}) \\ \cdot\ dF = Id\ell \sin\theta \end{cases}$$

Force de Laplace : $$\boxed{\vec{F} = \int_{(C)} Id\vec{\ell} \wedge \vec{B}}$$

Cas particuliers avec un champ $\overrightarrow{B}$ uniforme

Cas d'un circuit rectiligne de longueur L placé dans un champ $\overrightarrow{B}$ uniforme :



$$\overrightarrow{F} = \int_{(C)} I d\overrightarrow{\ell} \wedge \overrightarrow{B} = I\overrightarrow{L} \wedge \overrightarrow{B}$$

Cas d'un circuit fermé placé dans un champ $\overrightarrow{B}$ uniforme :

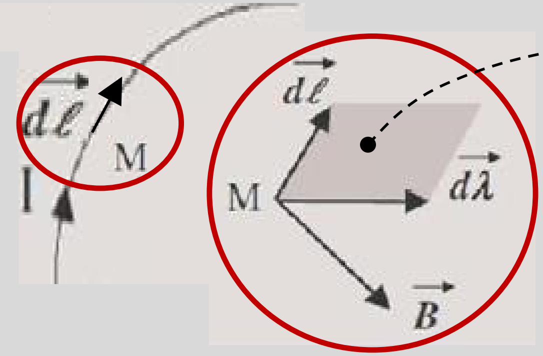
$$\overrightarrow{F} = \oint_{(C)} I d\overrightarrow{\ell} \wedge \overrightarrow{B} = I \underbrace{\left(\oint_{(C)} d\overrightarrow{\ell} \right)}_{\overrightarrow{0}} \wedge \overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$$

La résultante des forces de Laplace est nulle

3- Travail des forces magnétiques– Théorème de Maxwell

Déplacement élémentaire et flux coupé

- **Déplacement élémentaire ($d\lambda$) d'un élément de circuit soumis à un champ magnétique (B)**



$$\begin{cases} \vec{dF} = I\,\vec{d\ell} \wedge \vec{B} \\ d^2T = \vec{dF}\,\vec{d\lambda} \end{cases}$$

d^2T = travail effectué par les forces magnétiques

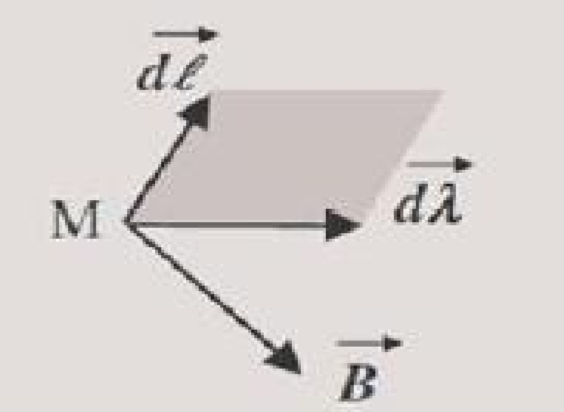
$$\begin{cases} d^2T = I\,(\vec{d\ell} \wedge \vec{B}).\vec{d\lambda} \\ d^2T = I\,(\vec{d\lambda} \wedge \vec{d\ell}).\vec{B} = I\,\vec{B}\,\vec{d^2S} \end{cases}$$

$\vec{B}.d^2\vec{S}$ = flux de $\vec{B}$ à travers l'élément de surface **balayé** par $d\vec{\ell}$ appelé **flux coupé** par $d\vec{\ell}$, noté $d^2\Phi_c \longrightarrow d^2T = Id^2\Phi_c$

Signe de $d^2\Phi_c$

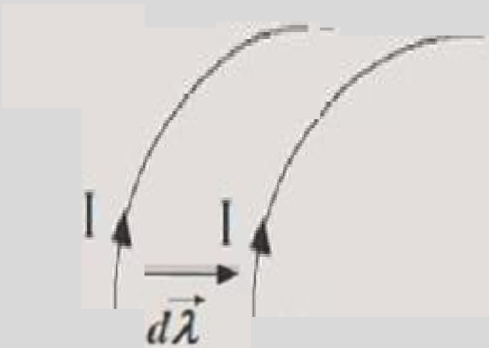
Règle : **Flux > 0 si :**

- **Le déplacement $\vec{d\lambda}$ a lieu vers la gauche du bonhomme d'Ampère**
- **$\vec{d\ell}$ étant orienté des pieds vers la tête de cet observateur**
- **Regardant dans le sens du champ $\vec{B}$.**



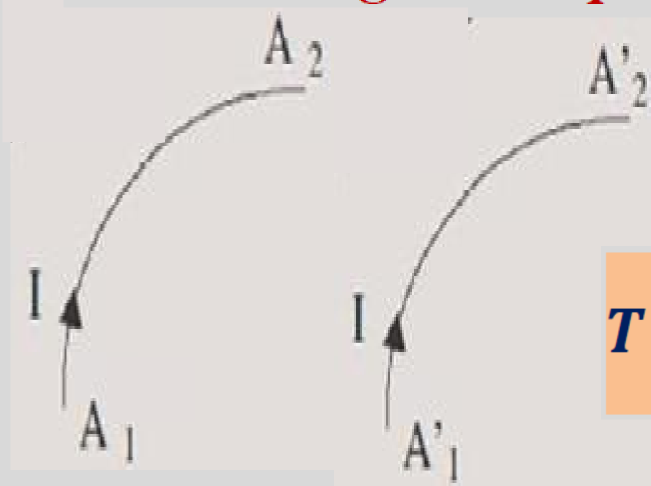
$$\longrightarrow \quad d^2\Phi_c > 0$$

Déplacement élémentaire d'un circuit :



$$dT = \int_{(C)} I d^2\Phi_c = I \int_{(C)} d^2\Phi_c = I d\Phi_c$$

Forme intégrée : déplacement fini d'un circuit de A *à* A'



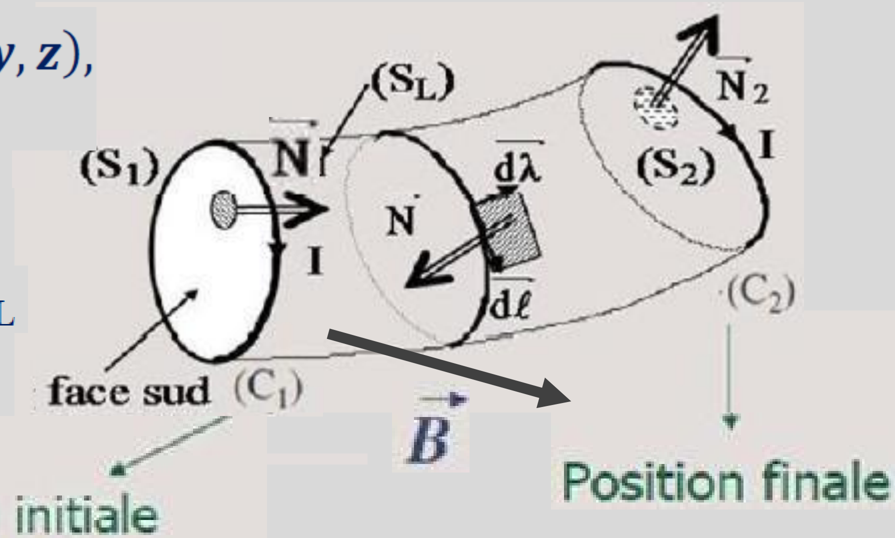
$$\boxed{T = \int_{AA'} I d\Phi_c = I \int_{AA'} d\Phi_c = I\Phi_c}$$

Théorème de Maxwell

- **Champ appliqué $\vec{B}(x, y, z)$, courant constant I.**
- **Déplacement 1 → 2**

  ⇒ surface balayée S_L

  ⇒ flux coupé Φ_c



- **$S_1 + S_2 + S_L$ = surface fermée ⇒ flux sortant $\Phi_s = 0$**

Avec les conventions de signe habituelles (tire-bouchon, bonhomme d'Ampère) : $\Phi_s = -\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_c = 0 \Rightarrow \boxed{\Phi_c = \Phi_2 - \Phi_1}$

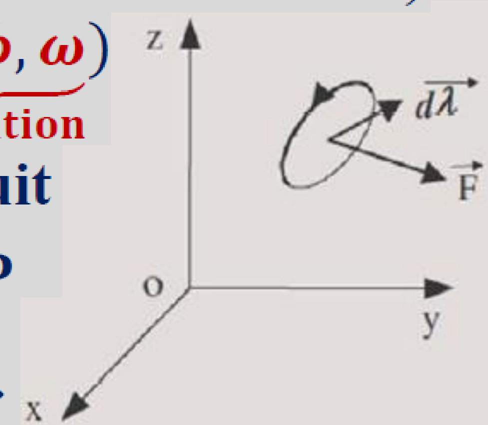
→ ***Théorème de Maxwell* : $\boxed{T = I(\Phi_2 - \Phi_1)}$ → $\boxed{dT = I d\Phi}$**

→ ***Travail des forces magnétiques exercées par le champ $\vec{B}$ appliqué à un circuit parcouru par un courant constant I et se déplaçant dans un champ magnétique invariable***

Application : calcul du torseur des forces magnétiques $(\vec{F}, \vec{\Gamma})$

- Circuit (C) rigide, courant I et champ $\vec{B}$ invariables ;
- Le flux capté est $\Phi = \Phi(\underbrace{x, y, z}_{\text{Translation}}, \underbrace{\theta, \phi, \omega}_{\text{Rotation}})$
- Tout déplacement élémentaire du circuit

$$\Longrightarrow \quad \Phi \longrightarrow \Phi + d\Phi \quad \text{avec} \quad \mathrm{d}T = \mathrm{I}d\Phi$$



Cas d'une translation

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = \overrightarrow{grad}\Phi . d\vec{\lambda}$$

pour toute translation $d\vec{\lambda}(dx, dy, dz)$

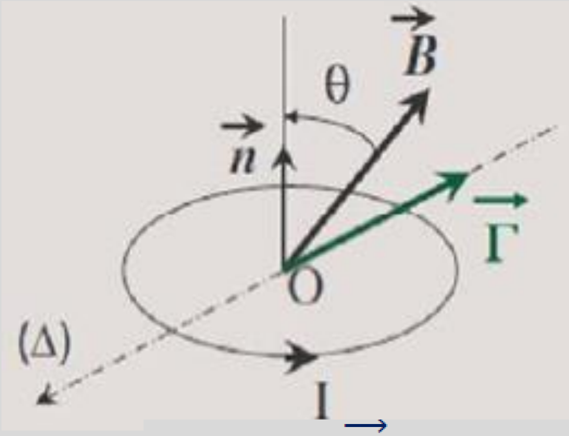
$$\mathrm{d}T = \vec{F}. d\vec{\lambda} = I\mathrm{d}\Phi = I\overrightarrow{grad}\Phi . d\vec{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F} = I\overrightarrow{grad}\Phi}$$

Cas d'une rotation autour d'un axe (Δ) : paramètre angulaire θ

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} d\theta \quad \text{pour toute rotation d'angle } \theta$$

$$\mathrm{d}T = \Gamma d\theta = I\mathrm{d}\Phi = I\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} d\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Gamma = I\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}}$$

Exemples :
1. Bobine dans un champ magnétique UNIFORME



- Bobine de N spires circulaires parcourues par un courant I invariable
- $\vec{n}$: normale orientée par I de la face Sud vers la face nord
- Champ appliqué $\vec{B}$ invariable et uniforme

Flux de $\vec{B}$ à travers la bobine :

$$\Phi = N \iint_{(S)} \vec{B}.\,d\vec{S} = N \iint_{(S)} B\,dS\cos\theta = NBS\cos\theta$$

<u>En translation</u> : $\vec{F} = I\,\overrightarrow{grad}\,\Phi = \vec{0}$

<u>En rotation</u> : $\Gamma = I\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -INBS\sin\theta$

$\vec{\Gamma} = NI\vec{S}\wedge\vec{B}$ avec $\vec{S} = S\vec{n}$ ou encore :

$\vec{\Gamma} = \vec{m}\wedge\vec{B}$ avec $\vec{m} = NI\vec{S}$ le moment magnétique de la bobine

2. Action d'un champ magnétique NON UNIFORME sur une boucle de courant de moment magnétique CONSTANT $\vec{m}$

Energie potentielle magnétostatique

Pour une boucle plane de très petites dimensions, on peut considérer que $\vec{B}$ est uniforme sur la surface de la boucle.

$Th.\ de\ Maxwell \Rightarrow dT = Id\Phi$

$$\text{avec } \Phi = \iint_{(S)} \vec{B}.d\vec{S} = \vec{B}.\iint_{(S)} dS\vec{n} = \vec{B}.S\vec{n}$$

$$\text{soit } dT = Id\Phi = d\left(IS\vec{n}.\vec{B}\right) = d\left(\vec{m}.\vec{B}\right)$$

On définit l'énergie potentielle magnétostatique E_p de la boucle par : $dE_p = -dT$

En intégrant depuis l'∞ où $B = 0$:

$$\boxed{E_p = -\vec{m}.\vec{B}}$$